

Una delle strutture dati più ricche, comprende anche gli alberi come caso speciale, è il grafo, una entità che proviene dalla matematica ma che viene largamente utilizzato anche in altre scienze.

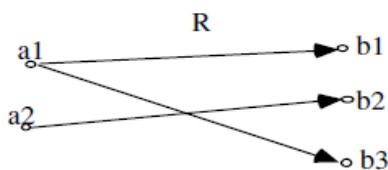
Nelle applicazioni pratiche si ricorre ai grafi quando occorre rappresentare una rete di collegamenti (ad esempio un circuito elettrico, una rete di strade, un sistema di tubazioni, ecc ...)

Grafo

Un grafo è una struttura dati che rappresenta le relazioni binarie (nel senso che si formano delle coppie) su insiemi di elementi.

Una relazione fra due insiemi A, B è un sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$.

Se ad esempio $A = \{ a_1, a_2 \}$ e $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ la relazione R definita dallo schema seguente:



è formata dalle coppie:

$$R = \{ \{a_1, b_1\}, \{a_1, b_3\}, \{a_2, b_2\} \}$$

mentre il prodotto cartesiano $A \times B$ sarebbe l'insieme formato da tutte le possibili coppie che si possono formare abbinando gli elementi di A e di B

Un caso particolare, utile in questo caso, è la relazione di un insieme con se stesso, ossia il prodotto cartesiano $A \times A$.

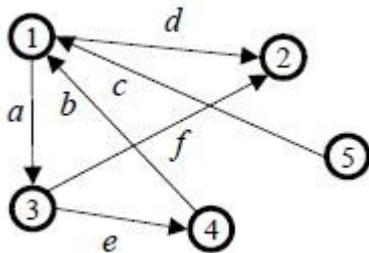
Grafo orientato

Un grafo orientato è una struttura $G(A, R)$ dove:

A è un insieme non vuoto di nodi

R , sottoinsieme di $A \times A$ è un insieme di archi orientati (relazioni binarie) tali che se $a_i \rightarrow a_j$ appartiene ad R nel grafo c'è un arco orientato da a_i verso a_j

Esempio di un modello grafico di un grafo orientato

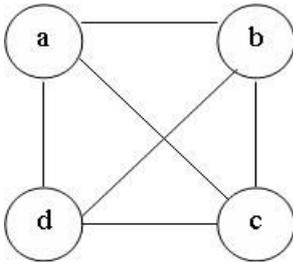


Grado di ingresso del nodo a_i : è il numero di archi che hanno a_i come nodo finale.

Grado di uscita del nodo a_i : è il numero di archi che hanno a_i come nodo iniziale.

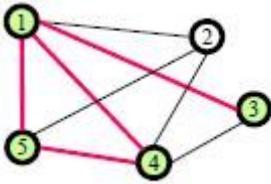
Un grafo si dice completo se per qualsiasi coppia (a_i, a_j) esiste un arco che va da a_i a a_j . A esiste un arco da a_i verso a_j .

Se un grafo è completo, significa che la relazione R coincide col prodotto cartesiano $A \times A$, ossia è una relazione totale.

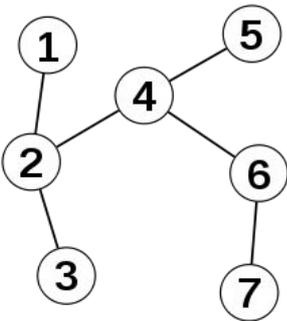


Si dice cammino da a a b la sequenza di nodi a_0, a_1, \dots, a_N che porta da $a_0 = a$ ad $a_N = b$ passando per gli archi di R.

- cammino semplice: tutti i nodi del cammino sono distinti
- cammino ciclico (o ciclo): quando $a = b$



Grafo aciclico: quando non è possibile per nessun nodo effettuare un cammino ciclico.



Grafo semplice: è un grafo privo di archi paralleli

Multigrafo: è un grafo con archi paralleli.

Albero di supporto (spanning tree): è un albero avente gli stessi nodi del grafo ma un sottoinsieme degli archi in modo tale che siano eliminati i cammini ciclici.

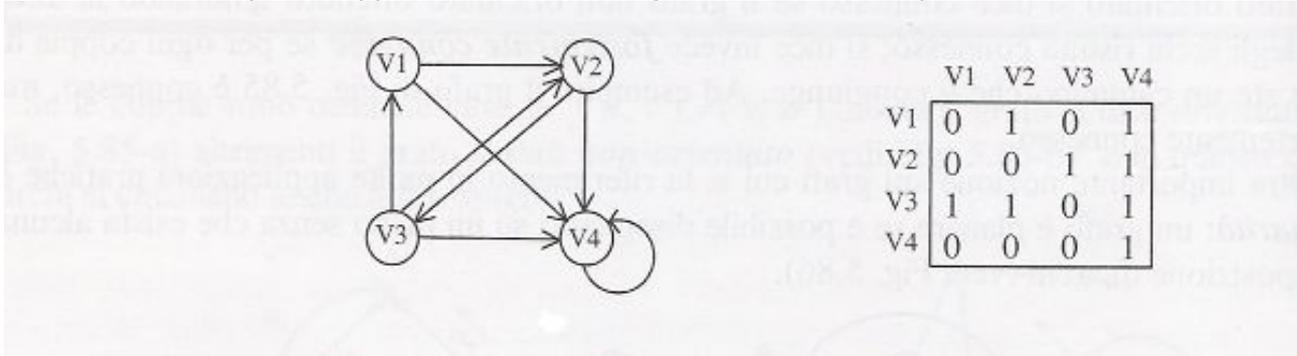
Rappresentazione dei grafi

Matrice di adiacenza

Una delle rappresentazioni più immediate è la **matrice di adiacenza**: un grafo di n nodi V_1, V_2, \dots, V_n viene rappresentato da una matrice A di $n \times n$ cifre binarie o di booleani con la convenzione che:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se esiste nel grafo l'arco } (V_i, V_j) \\ 0 & \text{se non esiste} \end{cases}$$

Questa è ad esempio la rappresentazione di un grafo orientato non pesato

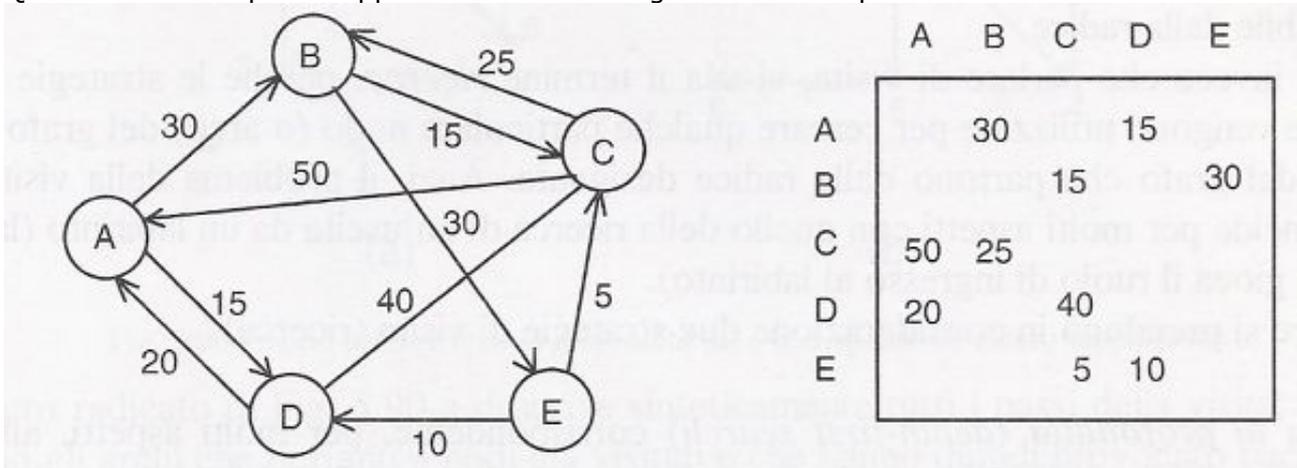


Un grafo non orientato ha invece una matrice simmetrica dove $A[i,j]=A[j,i]$

Matrice pesata

Una variante della matrice di adiacenza è la **matrice pesata** che può essere utilizzata per descrivere i grafi pesati, cioè i grafi in cui ad ogni arco si associa un numero detto "peso" che rappresenta una informazione della realtà che si vuole descrivere (potrebbe essere una distanza in km, un pedaggio autostradale, la portata di un tubo ecc ecc).

Questa è ad esempio la rappresentazione di un grafo orientato pesato



Gli elementi assenti possono essere impostati a 0 oppure ad un valore molto grande (MAX_INT) a seconda del problema. Ad esempio se quello che si rappresenta è la capacità di una strada (auto/ora) conviene mettere 0 mentre se è il costo di un pedaggio conviene mettere MAX_INT .

Lista di adiacenza

Quando il numero dei nodi è molto grande accade spesso che il numero degli archi sia molto inferiore ad n^2 : il numero m degli archi è generalmente dello stesso ordine di grandezza del numero n dei nodi. Questo significa che la matrice di adiacenza avrebbe pochi 1 e molti 0.

In tale caso può essere preferibile usare le liste di adiacenza, l'altro tipo di rappresentazione che può essere usata per i grafi che a differenza delle matrici di adiacenza può anche rappresentare grafi non semplici (multigrafi)

Per ogni nodo del grafo si costruisce una lista dei nodi raggiungibili seguendo gli archi che partono dal quel nodo.

Ad esempio la lista di adiacenza del grafo descritto precedentemente con la matrice di adiacenza è:

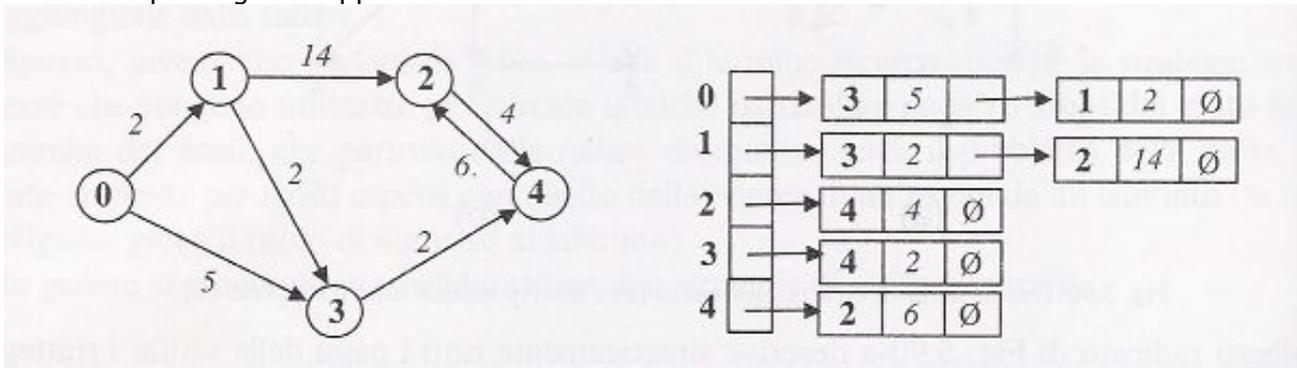
V1: < V2,V4>

V2: <V3,V4>

V3: <V1,V2,V4>

V4: <V4>

Altro esempio di grafo rappresentato con le liste di adiacenza



Visite dei grafi

Per i grafi il concetto di visita o attraversamento consiste nell'esplorare, secondo una strategia, tutti i nodi e tutti gli archi di un grafo partendo da un nodo indicato come radice e percorrendo tutti gli archi presenti nella parte raggiungibile dalla radice.

Visita in profondità: corrisponde alla visita anticipata sugli alberi. Si parte da un nodo scelto come radice del grafo e si cerca di "fare più strada possibile" cercando sempre nuovi nodi prima di tornare indietro e prendere la più vicina diramazione

Visita in ampiezza: corrisponde alla visita per livelli sugli alberi. Si parte dal nodo scelto come radice e si visitano quindi tutti i nodi immediatamente raggiungibili da un arco, poi si visitano tutti i vertici raggiungibili con un arco da questi e così via.

In entrambi i tipi di visite è necessario ad un certo punto tornare indietro (backtracking) per visitare i nodi successivi; poiché un grafo è connesso (cioè sono presenti dei cicli) è possibile entrare in un loop infinito.

Per evitare di entrare in un loop infinito è necessario dotare il nodo di informazioni aggiuntive di supporto agli algoritmi di visita.

Questa tecnica viene chiamata di "colorazione" del nodo perchè l'informazione aggiuntiva associata al nodo viene definita "colore".

Supponiamo di avere la possibilità di colorare ciascun nodo con tre colori: bianco (nodo ancora da visitare, è anche il valore di inizializzazione di un nodo prima della visita), grigio (nodo raggiunto ma non tutti gli archi che escono dal nodo sono già stati visitati), nero (nodo completamente visitato)